

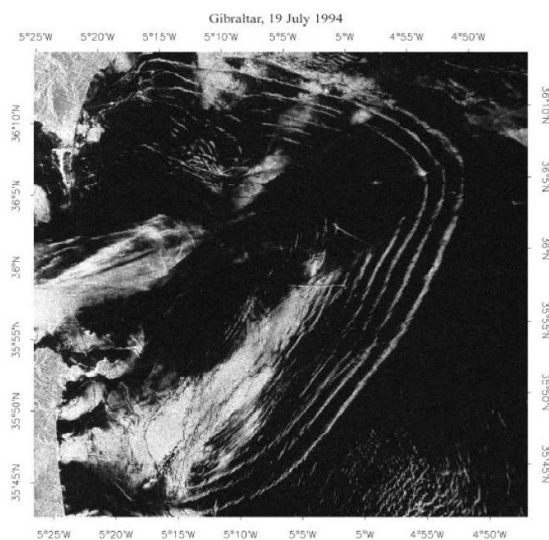
Stage de deuxième année de Master recherche
Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement
Filière Océan, Atmosphère et Hydrologie
Université Joseph Fourier – Grenoble I

Attracteur d'ondes internes

Simulations numériques, structure spatiale
et effets non-linéaires

Stage effectué par Nicolas GRISOUARD sous la direction de
Chantal STAQUET et Ivane PAIRAUD au
Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, UMR 5519
Équipe THEO.

14 juin 2007



*Ondes internes détectées par imagerie radar à
l'est du détroit de Gibraltar.*

Résumé La présence d'ondes de gravité internes est caractéristique des fluides stratifiés que l'on rencontre dans nombre de situations géophysiques. Ces ondes ont un angle de propagation par rapport à la direction de la gravité fixé par leur fréquence et la stratification. Lors d'une réflexion contre une paroi inclinée, il se produit une focalisation ou une défocalisation des ondes et dans des cuves ou des bassins fermés de géométrie simple, cela peut conduire à une concentration de l'énergie dans une zone très localisée de l'espace appelée *attracteur*. Nous présentons ici des simulations numériques bidimensionnelles reproduisant une configuration expérimentale utilisée par deux équipes avec qui nous avons collaboré et menant à l'observation d'un attracteur. Tout d'abord, les aspects de la théorie des ondes internes qui expliquent la formation des attracteurs est exposée ainsi que les dispositifs expérimentaux utilisés. Puis la prédiction théorique de la position de l'attracteur est présentée, ainsi que des tests afin de vérifier les valeurs des paramètres utilisés en entrée du code. La mise en application du code est ensuite expliquée, suivi de la validation par comparaison avec les résultats expérimentaux, nécessaires car un attracteur n'avait encore jamais été obtenu par simulation numérique. Finalement, nous ouvrons sur les perspectives qu'offrent ces simulations sur l'étude du mélange.

Abstract Internal gravity waves are characteristic features of stably stratified fluids, which are often encountered in geophysical contexts. They propagate on a course which angle with the gravitational direction is set by the stratification and their frequency. When reflected at a non-vertical boundary, they are subject to focusing or defocusing and in some relatively simple domain geometries, this can lead to their energy being focused onto a narrow portion of the spatial domain called *wave attractor*. We present here results of numerical experiments that mimic the configuration of laboratory experiments performed by our collaborators. First, the specific aspects of the internal waves theory that explain the formation of attractors are explained, followed by a presentation of the experimental setups that are used. We then explain how we predict the theoretical location of the attractor we simulate and how we check if the input parameters we set in the code are those we actually measure in our simulations. We then address the problem of how we set the numerical experiment and if the results we obtain are relevant by comparison with the tank experiments. This step is necessary as our results are unique and can't be compared to anything done before in numerical works. We finally present the potentialities of these simulations in the study of mixing.

Table des matières

Introduction	4
1 Ondes de gravité internes et attracteurs	5
1.1 Propriétés de réflexion des ondes de gravité internes	5
1.1.1 Relation de dispersion, vitesse de phase, vitesse de groupe	5
1.1.2 Propriété de réflexion et effet focalisateur	6
1.2 Attracteurs d'ondes de gravité internes	8
1.3 Dispositifs expérimentaux	9
1.3.1 Le dispositif de Cambridge	9
1.3.2 L'expérience numérique	11
2 Prédiction de la forme des attracteurs	11
2.1 Principe du calcul : théorie des rayons	12
2.2 Mise en application du code de rayons	12
2.2.1 Test sur un cas connu	12
2.2.2 Prévision de l'expérience à modéliser	12
3 Mesures de la viscosité et de la diffusivité thermique	13
3.1 Nécessité du calcul	13
3.2 Mesure de la diffusivité thermique κ	14
3.2.1 Principe de la mesure	14
3.2.2 Résultats	15
3.3 Mesure de la viscosité cinématique ν	16
3.3.1 Principe de la mesure	16
3.3.2 Résultats	17
3.4 Maîtrise du code de calcul	18

4	Obtention de l'attracteur et validation des simulations	18
4.1	Obtention de l'attracteur	19
4.1.1	Mise en place des stratification et topographie	19
4.1.2	Diffusivité thermique	19
4.1.3	Réglage du forçage	20
4.2	Résultats obtenus et comparaison avec l'expérience	21
4.2.1	Vérification préliminaire	21
4.2.2	Allure du champ de perturbation de densité et évolution temporelle	21
4.2.3	Modèle de comportement de l'attracteur	26
5	Non-linéarités et mélange	31
5.1	Existence de non-linéarités	32
5.2	Mise en évidence du mélange	32
5.3	Perspectives	33
	Conclusion et discussion	35

Introduction

Les fluides stratifiés constituent une branche de la mécanique des fluides qui s'est développée à partir du milieu du XX^e siècle, avec la montée en puissance de l'étude des océans et de l'atmosphère. De tels fluides sont caractérisés par la fréquence de Brunt-Väisälä N , qui est la fréquence propre d'oscillation d'une particule fluide de densité ρ_0 autour de sa position d'équilibre suivant la verticale.

Ces mouvements oscillatoires sont la base du comportement des ondes de gravité internes, qui transportent de grandes quantités d'énergie dans la stratosphère et l'océan profond par déferlement et mélange et doivent donc être prises en compte dans les modèles océaniques. Elles peuvent être causées par l'interaction entre un courant moyen et un relief, comme par exemple un courant de marée barotrope et un talus continental, comme on peut l'observer au large du golfe de Gascogne. Dans l'océan, si les mécanismes de génération de ces ondes sont relativement bien compris, leur rôle dans le mélange de l'océan profond constitue une des grandes questions de l'océanographie¹. La compréhension de ces ondes passe bien sûr par leur étude en contexte océanographique, mais cela n'est pas suffisant : des expériences en laboratoire et numériques sont nécessaires pour isoler et étudier leurs propriétés fondamentales afin de pouvoir proposer leur modélisation en contexte géophysique.

Or, l'un des effets amplifiant le mélange est la focalisation qu'elles peuvent subir lors de leur réflexion contre une topographie. Durant ce stage, une propriété particulière de réflexion de ces ondes contre une paroi inclinée et dans un milieu fermé a été étudiée, à savoir la possibilité que ces ondes soient focalisées dans des zones très réduites de l'espace appelées *attracteurs* où les déferlements se produisent de manière préférentielle. On s'est intéressé plus particulièrement à la structure du champ d'ondes à l'intérieur de l'attracteur, ainsi qu'au mélange induit. Ce travail a été effectué par trois équipes : une équipe de théoriciens de l'Institut royal Néerlandais de Recherche Maritime (NIOZ), une équipe d'expérimentateurs au Département de Mathématiques Appliquées et de Physique Théorique (DAMTP) de l'Université de Cambridge et notre équipe du LEGI, dont le but était de mettre en place une modélisation numérique qui, une fois sa validité confirmée, fournirait un puissant moyen pour compléter l'analyse des expériences déjà réalisées et pour prédire le résultat d'expériences futures ou trop complexes à mettre en place en conditions réelles.

Cet exposé présentera dans un premier temps les bases théoriques nécessaires à la compréhension du sujet, ainsi que les dispositifs expérimentaux employés. Il a été nécessaire, avant la prise en main du code de calcul, d'avoir un outil numérique

¹cf. Munk et Wunsch [11] pour une discussion approfondie

qui prédirait schématiquement, en s'appuyant sur la théorie générale des ondes internes, les résultats fournis par le code : c'est l'objet de la deuxième partie. La partie suivante traite de quelques tests effectués sur le code principal de calcul afin de connaître les viscosité et diffusivité thermique effectives du code de calcul. La quatrième partie traite ensuite de la réalisation de l'expérience numérique et de sa validation. La dernière partie présentera enfin quelques résultats préliminaires sur le mélange induit dans la cuve en guise d'ouverture vers les phénomènes non-linéaires et de mélange, qui intéressent plus particulièrement les géophysiciens.

1 Ondes de gravité internes et attracteurs

1.1 Propriétés de réflexion des ondes de gravité internes

1.1.1 Relation de dispersion, vitesse de phase, vitesse de groupe

Les ondes de gravité internes sont des ondes au comportement très particulier, en ce sens que leur relation de dispersion ne lie pas leur pulsation ω à la *norme* de leur vecteur d'onde \mathbf{k} comme c'est le cas pour les ondes électromagnétiques ou les ondes de surface, mais ω à la *direction* de \mathbf{k} par la relation :

$$\omega = N |\cos \theta| \quad ([1])$$

où N est la fréquence de Brunt-Väisälä et θ l'angle que fait \mathbf{k} avec l'horizontale.

Il peut être utile pour la compréhension du problème de se pencher sur la nature des mouvements oscillatoires en question. Nous avons dit précédemment que dans un milieu stablement stratifié, une particule fluide déplacée verticalement de sa position d'équilibre oscillait autour d'elle par l'action de la poussée d'Archimède car se trouvant alternativement dans un milieu plus ou moins dense qu'elle, et ceci à une pulsation N . Lors de son déplacement, disons la montée, elle va "pousser" les particules voisines qui vont descendre, provoquant la montée de leurs voisines, et ainsi de suite. Si un régime permanent peut être atteint, un mouvement oscillatoire se met en place dont la phase se déplace latéralement.

Cependant, dans les systèmes naturels, les ondes apparaissent suite à un forçage à une pulsation donnée ω qui n'est pas forcément N , citons par exemple le cas de la marée dont la période est de l'ordre de la journée. Imaginons donc que $\omega < N$. La particule déplacée va toujours être soumise à la force d'Archimède, mais son mouvement d'oscillation va être forcé à ω . De même que le randonneur cherche à diminuer la pente d'une montagne en gravissant celle-ci de biais, la particule va

trouver une trajectoire telle que N associée sera plus faible jusqu'à égaler ω . Le support de son mouvement ne sera donc plus vertical, mais incliné d'un angle θ par rapport à la verticale tel que $\omega = N |\cos \theta|$, qui est la relation de dispersion. Au contraire, si $\omega > N$, la force de rappel liée à la poussée d'Archimède ne peut pas "suivre le rythme" et faire en sorte que forçage et mouvement conservent un déphasage constant. Les ondes de gravité internes ne peuvent donc pas se propager à $\omega > N$.

La vitesse de groupe \mathbf{c}_g est définie comme le gradient de ω dans l'espace de Fourier spatial et par conséquent est perpendiculaire à la direction de \mathbf{k} . Ainsi, les fronts d'onde se propagent à angle droit par rapport à la propagation de l'énergie, et l'angle θ est aussi l'angle que fait la direction de \mathbf{c}_g avec la verticale (cf. fig. 1). Les expressions de $\|\mathbf{c}_g\|$ et de la norme de la vitesse de phase $\|\mathbf{c}_\phi\|$ sont donc : $\|\mathbf{c}_g\| = N \sin \theta/k$ et $\|\mathbf{c}_\phi\| = N \cos \theta/k$

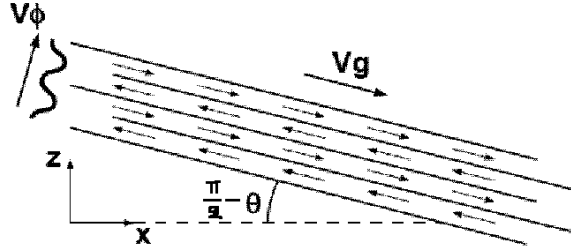


FIG. 1: Structure d'une onde interne. La phase se propage vers le haut, tandis que le rayon progresse vers le bas selon la vitesse de groupe. Tiré de Gostiaux [3].

Une propriété importante des ondes de gravité internes est que l'équation [1] associe une fréquence donnée à une valeur de $|\cos \theta|$, soit à deux angles : θ et $\pi - \theta$, comme montré en fig. 2 où l'on voit clairement les deux directions de propagation de l'énergie par rapport à la verticale, ce qui donne quatre faisceaux en 2D ou deux cônes en 3D. Cela va entraîner une propriété de réflexion particulière qui fait l'objet de notre étude.

1.1.2 Propriété de réflexion et effet focalisateur

Nous avons dit qu'une onde monochromatique ne se propageait que dans deux directions données par rapport à la verticale². Ainsi, il n'y aura pas de réflexion spéculaire comme pour des ondes acoustiques ou électromagnétiques car l'angle de

²Sauf mention contraire, la "propagation de l'onde" se référera à la propagation de l'énergie.

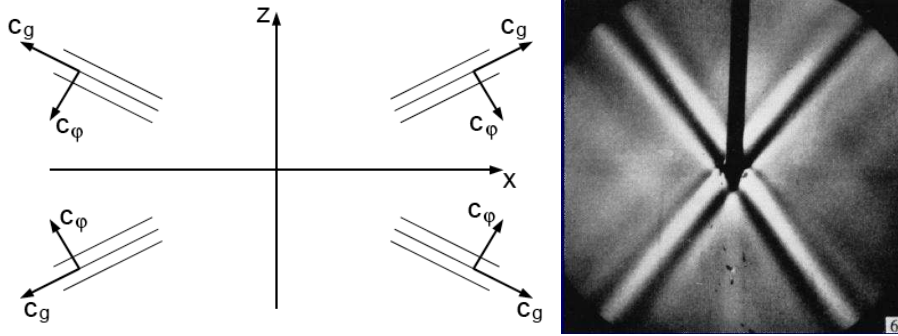


FIG. 2: À gauche, les quatre configurations possibles de rayonnement d'ondes internes bidimensionnelles (tiré de Gostiaux [3]); à droite, expérience de Mowbray et Rarity (1967) où ces propriétés ont été observées pour la première fois. Le champ d'ondes est généré par un objet oscillant au centre.

réflexion va être fixé par N et ω et non par l'inclinaison du plan sur lequel l'onde va se réfléchir. Cet angle sera égal à l'angle d'incidence (par rapport à l'horizontale) ou à son opposé, suivant l'inclinaison du plan de réflexion. On parle alors de régimes respectivement sous-critique ou sur-critique (cf. fig. 3).

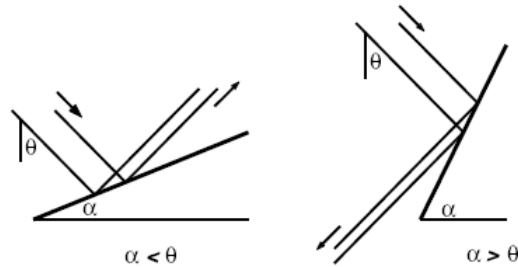


FIG. 3: Réflexion sur-critique (à gauche) et sous-critique (à droite) de deux rayons d'ondes internes sur une paroi inclinée. L'exemple montre une focalisation, mais inverser le sens de propagation des ondes revient à montrer une défocalisation. Tiré de Lam [6].

En termes de longueur d'onde, si chaque rayon dessiné peut être vu comme une ligne équiphase (car $\mathbf{k} \perp \mathbf{c}_g$), une (dé)focalisation entraîne un resserrement (écartement) des équiphases et donc une diminution (augmentation) de la longueur d'onde. Une construction géométrique simple (cf. fig. 4) permet de calculer le

facteur d'amplification de la longueur d'onde lors d'une focalisation :

$$\frac{\lambda^i}{\lambda^r} = \gamma = \left| \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} \right| \quad ([2])$$

Pour une défocalisation, γ est changé en $1/\gamma$.

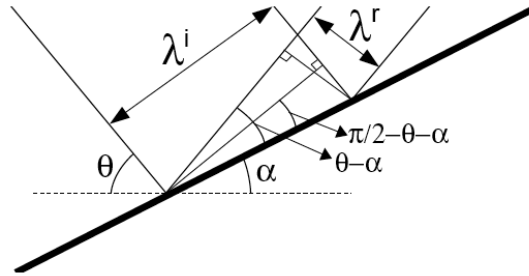


FIG. 4: Réflexion focalisante d'ondes internes sur une paroi inclinée. Attention, dans ce rapport, les angles sont définis par rapport à la verticale, et non l'horizontale, ce qui ne modifie pas l'équation [2]. Tiré de Gostiaux [3].

1.2 Attracteurs d'ondes de gravité internes

Les résultats théoriques synthétisés dans cette section ont été publiés par Leo MAAS et Frans-Peter LAM dans un cadre non-visqueux et sont à la base de notre étude (cf. Maas *et al.* [8], [10]). On a vu qu'une réflexion contre une paroi inclinée peut entraîner une focalisation du faisceau, et donc une concentration de l'énergie associée. Il est intéressant dans un cas concret de suivre les rayons après de multiples réflexions et donc de focalisations/défocalisations. Dans certains cas, les rayons finissent par tous adopter une *trajectoire limite*, l'*attracteur*, indépendamment des conditions initiales et du forçage. Pour illustrer ces faits, prenons l'exemple d'un attracteur que l'on obtient dans une cuve trapézoïdale bi-dimensionnelle et verticale à stratification constante, qui est celle utilisée dans ce stage. Ce choix est fait en raison de sa simplicité : un seul pan incliné avec un angle d'inclinaison constant et, pour une onde monochromatique, un seul angle de propagation. On peut se reporter en fig. 5 pour voir comment des paquets d'ondes provenant d'endroits différents finissent par converger vers l'attracteur.

Il faut avoir en tête, même si ces cas de figures ne se rencontreront pas par la suite, que cet attracteur de période 1 (une seule réflexion contre la surface) est le plus simple que l'on puisse obtenir. Suivant ω , N et la forme de la cuve, on peut avoir des attracteurs de périodes supérieures, plusieurs attracteurs simultanés, ou pas d'attracteur du tout.

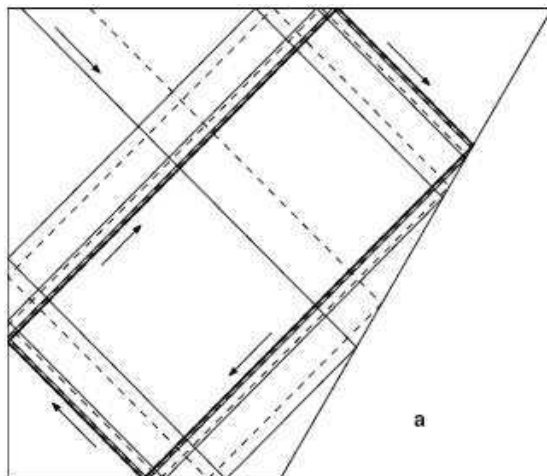


FIG. 5: Focalisation de rayons (lignes fines solides et tiretées) convergeant vers un attracteur (ligne épaisse solide). Tiré de Maas *et al.* [9].

Pour terminer cette présentation du stage, nous allons décrire les deux dispositifs expérimentaux qui ont été mis en place afin d'étudier quantitativement l'attracteur.

1.3 Dispositifs expérimentaux

1.3.1 Le dispositif de Cambridge

La première génération d'un attracteur en laboratoire a été réalisée en 1997 au Laboratoire de Physique de L'ENS de Lyon par Leo MAAS et Joël SOMMERIA et décrite par Maas *et al.* [9], la géométrie et la stratification étant les mêmes que celles décrites dans le paragraphe 1.2. Cette expérience avait pour but principal de démontrer qu'il était possible d'obtenir un attracteur en cuve. Afin de ne pas de modifier la forme de la cuve ou d'entraver le chemin des ondes avec un exciteur de type batteur ou corps oscillant, une méthode d'excitation paramétrique des ondes a été employée³ : en faisant osciller la cuve verticalement à une pulsation 2ω , on peut exciter des ondes internes à une pulsation ω .

Cependant, cette expérience, dont la visualisation se faisait par le biais de huit couches de fluorescine, n'était pas adaptée à une bonne quantification des phénomènes associés. Ainsi, une nouvelle campagne de mesures a été initiée l'an

³Voir le Landau et Lipschitz de Mécanique pour la mise en équations et Benielli [1] pour son application aux ondes internes.

dernier dans le cadre du doctorat de Jeroen HAZEWINKEL encadré par Leo MAAS (NIOZ) et Stuart DALZIEL (DAMTP). En utilisant une cuve parallélépipédique séparée en deux par une paroi inclinée, deux cuves trapézoïdales de formes différentes sont obtenues, qui sont relativement étroites, de manière à pouvoir réaliser des écoulements bidimensionnels (cf. fig. 6). La stratification stable est réalisée à l'aide de salinité dans l'eau. Pour avoir la stratification désirée, le calcul du mélange entre eau salée et eau douce pendant le remplissage se fait par deux pompes de précision couplées entre elles et pilotées par ordinateur. Ces cuves sont excitées par instabilité paramétrique et la visualisation se fait par strioscopie qui mesure les fluctuations d'indice de réfraction optique du fluide. En effet, l'indice optique dépend de la densité du fluide et des mouvements dans ce fluide de densité inhomogène provoquent des effets visuels un peu similaires à ceux provoqués par une bougie allumée que l'on regarderait en transparence.

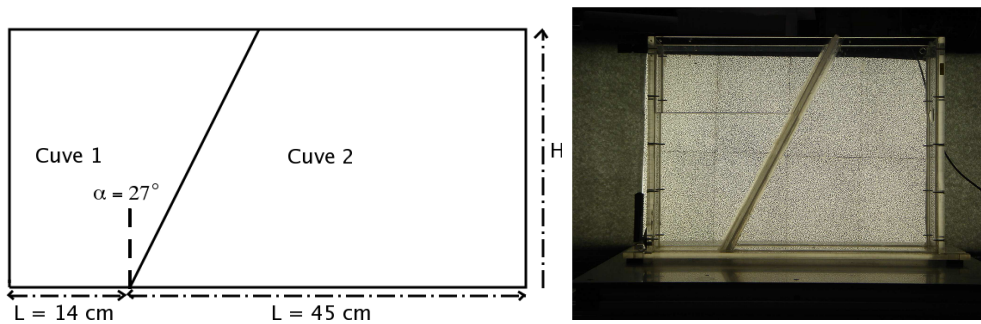


FIG. 6: À gauche, schéma des cuves employées à Cambridge ; à droite, photographie de ces cuves. La cuve a une dimension normale aux images de 10,1 cm, ce qui la rend relativement bidimensionnelle.

Au début de ce stage, l'équipe avec qui nous avons collaboré avait l'intention de réaliser des expériences avec des configurations de forçage et de stratification différentes. Nous avons choisi de modéliser une expérience dans la cuve 1, avec $N = 2 \text{ rad.s}^{-1}$, $\omega = 1,65 \text{ rad.s}^{-1}$, $H = 30 \text{ cm}$ (cf. fig. 6 pour les notations). Il se trouve que par la suite, cette équipe s'est concentrée sur une expérience dans la cuve 2, avec $N = 3 \text{ rad.s}^{-1}$, $\omega = 1,23 \text{ rad.s}^{-1}$ et $H = 20 \text{ cm}$. La comparaison des résultats n'a cependant pas posé de problèmes particuliers.

La réalisation de ces expériences n'a pas constitué le cœur du stage, bien que je me sois rendu quelques jours à Cambridge afin d'assister et de participer à des mesures. L'essentiel du stage a été de modéliser numériquement ces expériences à l'aide d'un code dont la description va clore la mise en place du sujet.

1.3.2 L'expérience numérique

Le dispositif expérimental au cœur de ce stage a donc été de reproduire les expériences sus-citées à l'aide d'un modèle numérique de mécanique des fluides. Le code employé a été le MITgcm⁴ qui est à l'origine un code adapté à la résolution des équations de dynamique des fluides géophysiques mais qui est assez complet pour pouvoir reproduire des expériences en cuve de laboratoire. Ce modèle est non-linéaire et non-hydrostatique et qui emploie une technique de volumes finis en espace et un schéma de Adams-Bashforth de 2^e ordre en temps. L'emploi de ce code fait l'objet des sections 3.4 et 4.1.

Une des particularités de ce code est qu'il opère dans le plus vaste nombre de cas possibles, des contextes océaniques en tous genres aux modélisations d'expériences en laboratoires. La seule approximation qu'il emploie est l'incompressibilité, d'autres approximations pouvant être utilisées en option. Il est donc lourd à utiliser, ce qui a rendu toute modification d'un paramètre quelconque très voire trop compliquée dans le temps imparti. Heureusement, il a été possible de partir d'une configuration maîtrisée par l'équipe de Chantal STAQUET depuis plusieurs années, à savoir celle d'un talus continental 2D auquel il a suffi d'un nombre relativement modeste de modifications⁵ pour arriver à la configuration qui nous intéressait.

Les calculs ont été réalisés sur la machine Nec SX-8 en configuration monoprocesseur de l'Institut de Développement et des Ressources en Informatique Scientifique.

2 Prédiction de la forme des attracteurs

Afin de savoir si les attracteurs obtenus lors des simulations numériques étaient corrects, un code de rayons a été utilisé. Ce programme calcule les trajectoires de particules fictives, particules que nous appellerons *rais*⁶, se déplaçant le long de lignes en tout point tangentes à \mathbf{c}_g , les *rayons*. Ce code de rayons est un programme écrit en FORTRAN95, associé à un script Matlab permettant de tracer les résultats.

⁴Massachusetts Institute of Technology global circulation model

⁵...et d'une interaction avec l'équipe support du code...

⁶conséquence d'une traduction malheureuse de l'inapproprié anglais *rays*...

2.1 Principe du calcul : théorie des rayons

Il s'agit d'une méthode de tracé de rayons. Sont d'abord définis position initiale, taille ainsi que fréquence d'un paquet d'ondes composé de plusieurs rais, dans un milieu de fréquence de Brunt-Väisälä $N(\mathbf{r}, t)$ dans lequel peut exister un écoulement moyen $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$.

Le calcul des trajectoires va ensuite s'appuyer sur la théorie des rayons ou théorie eikonale. Premièrement, leur trajectoire est, en l'absence d'écoulement moyen, définie par :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}_g$$

Or, \mathbf{c}_g se déduit de la connaissance de ω , qui s'obtient à l'aide de l'approximation WKB⁷. Cette approximation dit, dans le cas qui nous intéresse et qui est aussi celui de l'optique géométrique, que les variations des propriétés du milieu (i.e. $N(\mathbf{r})$ ici) se font sur des échelles spatiale et temporelle grandes respectivement devant la longueur d'onde et la période de l'onde. Ainsi, en chaque point, le milieu peut être considéré comme uniforme et stationnaire sur ces échelles. La stationnarité implique que la fréquence reste constante et la trajectoire des rais est ainsi construite de proche en proche. Dans notre étude, N est constante dans le domaine.

Maintenant que les principes du calcul ont été posés, intéressons-nous à l'utilisation qui a été faite de ce code.

2.2 Mise en application du code de rayons

2.2.1 Test sur un cas connu

Il a été décidé de reproduire la configuration de l'expérience de 1997 évoquée en 1.3.1 et décrite par Maas *et al.* [9], dont la cuve avait une géométrie proche de celle qui va être employée dans notre étude. Le résultat est présenté en fig.7 : on obtient bien l'attracteur décrit dans l'article.

2.2.2 Prévision de l'expérience à modéliser

On rappelle que cette expérience est décrite en section 1.3.1. La prévision est en fig.8. On a un attracteur bien défini et une convergence rapide des rayons.

⁷Wentzel-Kramers-Brillouin

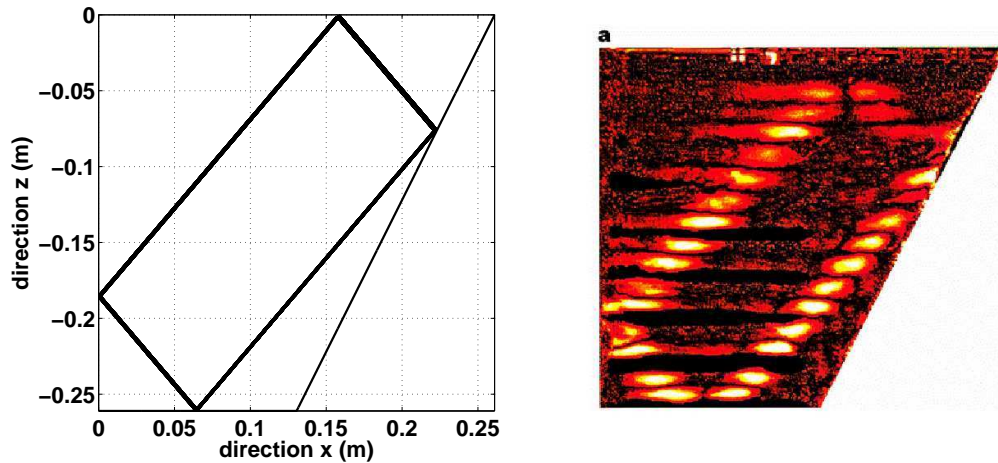


FIG. 7: À gauche, résultat du code de rayons, les premières itérations n'ont pas été affichées afin de ne garder que la trajectoire finale ; à droite : résultat de l'expérience de 1997.

C'est pour cette raison que parmi les différentes configurations proposées par nos collaborateurs, il a été choisi de modéliser cette expérience.

3 Mesures de la viscosité et de la diffusivité thermique

Cette étape aura été la première prise en main du MITgcm, et marque ainsi la transition entre les expériences préliminaires et le début des simulations numériques.

3.1 Nécessité du calcul

On pourrait penser que dans un code numérique, les paramètres sont fixés par l'utilisateur et n'ont donc pas à être mesurés. Des effets numériques peuvent cependant apparaître qui ont tendance à produire des effets diffusifs parasites, à l'instar des méthodes de différences finies. La méthode employée ici, celle des volumes finis associée à un schéma d'Adams-Bashforth, est plus robuste que ces dernières mais certains facteurs qui nous sont inconnus pourraient atténuer les performances de la méthode. Or, notre étude va porter sur un phénomène d'échelle spatiale faible dont la taille est fixée par les effets moléculaires, à savoir la viscosité

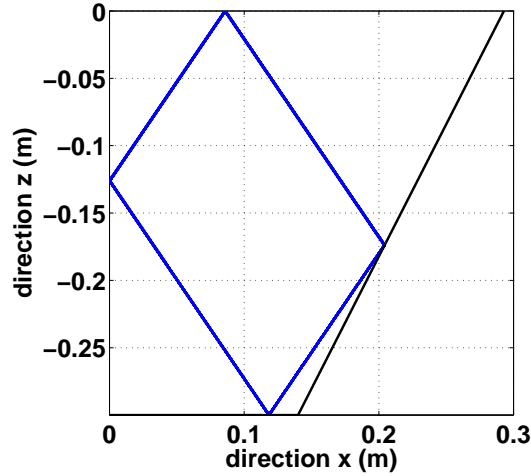


FIG. 8: Prédiction de l'attracteur de l'expérience qui va être modélisée par la suite.

ν et la diffusivité thermique κ . Il est donc impératif de savoir quelles valeurs prennent les coefficients.

Deux expériences numériques simples ont été menées en parallèle avec le code MITgcm pour mesurer ces deux coefficients de diffusion. Elles ont été réalisées dans une cuve-test de mêmes dimensions que notre future expérience, à savoir de longueur $L = 0,3\text{ m}$ et de hauteur $H = 0,3\text{ m}$, mais sans topographie : le domaine est carré. L'origine des x est prise sur la paroi gauche, l'origine des z à la surface, avec $z < 0$ sous la surface.

3.2 Mesure de la diffusivité thermique κ

3.2.1 Principe de la mesure

Nous allons chercher à résoudre une équation où seul κ intervient, à savoir l'équation de la diffusion thermique à une dimension :

$$\partial_t T(z, t) = \kappa \partial_z^2 T(z, t) \quad ([3])$$

On prend le cas classique où le fluide est au repos et T est fixée à la surface et au fond. Le profil de température initial est défini comme :

$$T(z, t_0) = T_s + \frac{\Delta T}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{z + H/2}{\delta(t_0)} \right) - 1 \right) \quad ([4])$$

avec erf définie comme $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\zeta^2} d\zeta$

Les conditions aux limites sont $T(z = 0) = T_s = 15^\circ\text{C}$, $T(z = -H) = T_f = 5^\circ\text{C}$, $\Delta T = T_s - T_f$. Le profil de température à chaque instant s'écrit comme l'équation [4] en remplaçant t_0 par t , avec $\delta(t) = 2\sqrt{\kappa(t + t_0)}$, et est une solution exacte de l'équation [3]. La stratification étant stable, la largeur du profil va croître par diffusion thermique en fonction du temps comme $\delta^2 \sim 4\kappa t$, ce qui permet d'accéder à κ .⁸

3.2.2 Résultats

Les tests ont été organisés de la manière suivante : quatre résolutions différentes ont été utilisées, 200×200 , 400×400 , 600×600 et 1000×1000 points, et pour chaque résolution, deux valeurs de κ ont été entrées en paramètres pour le code : 10^{-6} et $10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour chaque test, une fonction de la forme de l'équation [4] est ajustée sur le profil vertical à chaque instant, le seul paramètre ajustable étant δ . On obtient ainsi à chaque instant $\delta(t)$ et on peut en déduire κ par régression linéaire. Un exemple est en fig. 9, et un résumé des résultats est présenté en table 1. On voit qu'il y a un très bon accord entre les valeurs de κ spécifiées en tant que paramètre d'entrée et les valeurs effectivement mesurées.

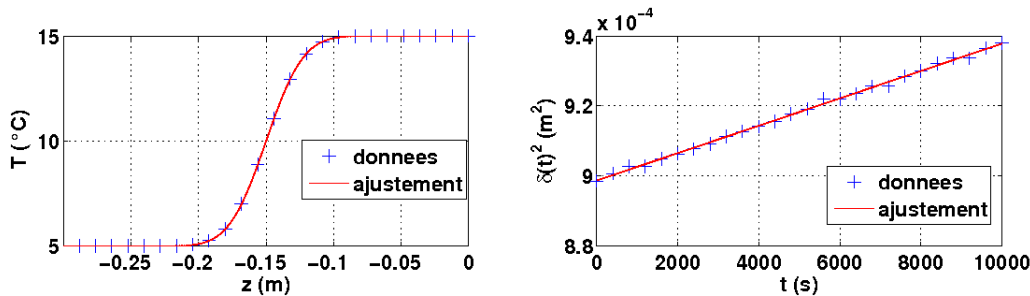


FIG. 9: Résultats pour une grille comportant 1000×1000 points, la valeur de κ spécifiée dans les paramètres d'entrée du code étant $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. À gauche, profil de température dans la cuve-test servant à mesurer κ (tous les points ne sont pas affichés), ainsi que le résultat de l'ajustement. À droite, tracé de $\delta^2 = f(t)$, ainsi que la courbe de régression linéaire associée.

Il faut cependant faire attention au fait que les simulations n'ont pas pu être menées sur de longues périodes du fait de leur coût horaire. Comparativement

⁸cf. par exemple Guyon, Hulin, Petit [4], p. 36 pour une démonstration complète

	$\kappa = 10^{-6}$	$\kappa = 10^{-9}$
200 × 200	$(0,9994 \pm 0,0008) \cdot 10^{-6}$	$(0,9969 \pm 0,0008) \cdot 10^{-9}$
400 × 400	$(1,000 \pm 0,002) \cdot 10^{-6}$	$(1,001 \pm 0,002) \cdot 10^{-9}$
600 × 600	$(1,000 \pm 0,005) \cdot 10^{-6}$	$(0,998 \pm 0,005) \cdot 10^{-9}$
1000 × 1000	$(0,999 \pm 0,007) \cdot 10^{-6}$	$(1,000 \pm 0,007) \cdot 10^{-9}$

TAB. 1: Résumé des résultats obtenus lors des mesures de κ (en $m^2 \cdot s^{-1}$), en fonction de la taille de la grille et de la valeur de κ donnée en paramètre d'entrée.

au temps caractéristique de diffusion, $\tau = \delta^2/\kappa = 3 \cdot 10^4 s$ pour $\kappa = 10^{-6}$ ou $\tau = 3 \cdot 10^7 s$ pour $\kappa = 10^{-9}$, nos simulations de durées 100 s sont très courtes, ce qui ne pose pas de problème particulier car les durées de nos simulations seront de l'ordre de la centaine de secondes.

3.3 Mesure de la viscosité cinématique ν

3.3.1 Principe de la mesure

En partant d'une cuve de mêmes dimensions que précédemment avec des champs de température et de densité homogènes, nous allons initialiser un champ de vitesse de type tourbillon de Green-Taylor et laisser évoluer le système librement, sans forçage. Ainsi, l'énergie cinétique devrait décroître sous la seule action de la viscosité. Le tourbillon de Green-Taylor est défini par la fonction de courant :

$$\psi(x, z, t) = \psi_0(t) \cdot \sin(k_x x) \cdot \cos(k_z z)$$

avec $u = \partial\psi/\partial z$, $w = -\partial\psi/\partial x$, $k_x = \pi/L$ et $k_y = \pi/H$. On remarque que $rot_z(\mathbf{u}) = -\Delta\psi$ donc l'équation de la vorticité, obtenue à partir de l'équation de Navier-Stokes et de l'incompressibilité du fluide, s'écrit :

$$\partial_t(\Delta\psi) + J(\psi, \Delta\psi) + \nu\Delta^2\psi = 0$$

où $J(A, B)$ est le jacobien de A et B . Or, comme $\Delta\psi = -\|\mathbf{k}\|^2\psi$, que l'opérateur jacobien est linéaire et que $J(A, A) = 0$, l'équation précédente se résout simplement :

$$\psi_0(t) = \Psi_0 e^{-\nu \mathbf{k}^2 t}$$

L'énergie cinétique dans le domaine s'en déduit :

$$E_c \propto \iint (u^2 + w^2) dx dz \propto e^{-2\nu \mathbf{k}^2 t}$$

3.3.2 Résultats

Les tests ont été organisés de la manière suivante : trois résolutions différentes ont été utilisées, 200×200 , 500×500 et 1000×1000 points. Un script Matlab de calcul de l'énergie totale est ensuite utilisé afin d'obtenir la décroissance de l'énergie cinétique à chaque instant. Une régression linéaire de $\ln(E_c/E_{c_{ref}}) = f(t)$ permet enfin de remonter à ν . Un exemple de courbe de décroissance de l'énergie est donné en fig. 10 et les résultats obtenus sont en table 2. On peut voir que les résultats concordent avec la valeur de $\nu = 10^{-6} m^2.s^{-1}$ fournie en entrée à 7% près dans la plus défavorable de nos situations. Les sources d'erreur proviennent probablement du protocole employé (difficulté à faire tourner les simulations sur des temps longs en raison de leur coût), mais on peut tout de même en conclure que par la suite, la valeur de ν fournie en entrée pourra être considérée comme étant la valeur effective dans les simulations.

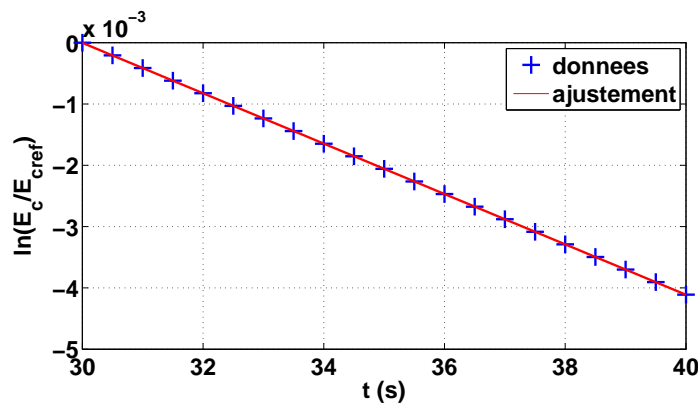


FIG. 10: Tracé de $\ln(E_c/E_{c_{ref}}) = f(t)$ (croix), ainsi que la courbe de régression linéaire associée (ligne solide) (grille 1000×1000 points).

taille grille	200×200	500×500	1000×1000
mesure de ν ($\times 10^{-6} m^2.s^{-1}$)	$1,0394 \pm 0,0001$	$1,0026 \pm 0,0001$	$0,9368 \pm 0,0004$

TAB. 2: Résumé des résultats obtenus lors des mesures de ν .

De même que pour κ , les simulations ont tourné sur des temps très courts comparé au temps caractéristique d'action de la viscosité, ce qui ne pose pas de problème car les durées de nos simulations seront de l'ordre de grandeur des durées simulées ici.

3.4 Maîtrise du code de calcul

Comme il a été dit en introduction à cette section, cette étape a été une première prise en main du code. Elle a permis, outre les résultats présentés précédemment, de comprendre certains réglages qui allaient être nécessaires aux simulations ultérieures.

La configuration de base était celle d'expériences dans la table tournante Coriolis du LEGI, expériences 2D dans une cuve de 13 m de long, 90 cm de hauteur d'eau et une topographie de type talus continental. La première tâche a été d'adapter la taille du domaine à notre taille de cuve mais sans topographie.

Ensuite, les conditions aux limites de glissement sans frottement ont été définies. Une prise en compte des effets de viscosité sur les bords, se traduisant en pratique par l'imposition de conditions de non-glissement, aurait mené au développement de couches limites, en théorie très fines. Or, notre pas de grille qui allait jusqu'à 0,3 mm n'aurait permis d'allouer au maximum que deux ou trois points de grille à ces zones, ce qui aurait été notoirement insuffisant.

Le but étant de réaliser des simulations directes, une des premières étapes a été de désactiver l'option qui, lorsque le nombre de Richardson devient trop élevé, calcule de nouveaux coefficients de diffusion, les fameux coefficients de diffusion effectifs turbulents que l'on rencontre dans l'océan et l'atmosphère. Or, ceci a rendu le code instable. La résolution de ce problème a été assez technique et sa description n'a pas forcément sa place dans cet exposé, disons seulement qu'il a fallu réduire les contraintes sur la résolution de l'équation de continuité et moduler le nombre d'itérations que le solveur de pression effectuait pour chaque pas de temps, à savoir augmenter ce nombre au fur et à mesure que la résolution augmentait. Il a été aussi constaté que placer une condition de toit rigide à la surface rendait les simulations beaucoup plus instables. Bien que la comparaison du comportement avec et sans surface libre ait été un des objectifs annexes du stage, ce problème n'a pas été jugé assez prioritaire dans le temps qui nous était imparti pour pouvoir être résolu. Toutes les simulations dont il est question dans ce rapport sont donc avec surface libre.

4 Obtention de l'attracteur et validation des simulations

Toutes les étapes préliminaires ayant été accomplies, la simulation de l'expérience dont il a été question en sections 1.3.1 et 2.2.2 peut commencer. Cette

partie va d'abord présenter comment l'attracteur a été obtenu, puis la démarche employée pour s'assurer que les résultats obtenus sont réalistes.

4.1 Obtention de l'attracteur

Pendant la phase de tests, une grille de 200×200 points a été employée, soit $dx = dz = 1,5 \text{ mm}$, et une grille de 500×500 points ($dx = dz = 0,6 \text{ mm}$) a été employée pendant la phase finale d'obtention de l'attracteur.

4.1.1 Mise en place des stratification et topographie

La configuration nous ayant servi de base de travail comportait une topographie de talus continental idéalisé. Il a suffi de la transformer en un talus de pente constante et qui monte jusqu'à la surface.

La stratification a été réalisée en température et non en la salinité comme à Cambridge car la configuration de base était stratifiée en température. Pour cela on fixe le champ de température initial dans le MITgcm, une augmentation linéaire de T de 5°C au fond à 15°C à la surface. Le coefficient de dilatation thermique α est ensuite calculé puis fourni au code de manière à ce que le N désiré soit obtenu, le tout étant relié par la relation $N^2 = g \alpha dT/dz$. On trouve qu'avec le champ de température choisi, $\alpha = 0,0123 \text{ K}^{-1}$.

4.1.2 Diffusivité thermique

Le coefficient de diffusivité thermique κ est environ 100 fois plus élevé que son équivalent halin (de l'ordre de $10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour le premier, $10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour le second). Ainsi, dans nos premières simulations, non seulement l'eau chaude du haut tendait à se refroidir et l'eau froide du bas à se réchauffer, mais de plus ces variations de températures se faisaient rapidement du fait du nombre de Prandtl thermique Pr bas, $Pr = \nu/\kappa$ étant le nombre adimensionné qui compare le temps de diffusion thermique au temps d'action de la viscosité⁹. Ainsi, au bout d'une vingtaine de périodes, la stratification se trouvait détruite en haut et en bas et le domaine où la stratification restait constante et stable ne cessait de se réduire verticalement, empêchant tout régime stationnaire de s'établir.

Or, il n'est pas simple dans un code numérique d'éloigner Pr de l'unité. Après beaucoup d'hésitations, il a été décidé de diviser κ par 100, ce qui n'a pas affecté la

⁹il s'agit du même phénomène que celui traité en section 3.2

stabilité du code et a permis de réduire la progression des couches de mélange de manière à ce qu'elles restent de taille négligeable devant la hauteur d'eau pendant la durée de l'expérience. Au final, les paramètres de l'expérience sont $\nu = 10^{-6} m^2.s^{-1}$ et $\kappa = 10^{-8} m^2.s^{-1}$.

4.1.3 Réglage du forçage

Le forçage de la configuration de base reproduisait un batteur plat vertical oscillant horizontalement à une fréquence ω . Or, notre but était d'arriver à reproduire l'oscillation verticale de la cuve de Cambridge.

Des simulations ont d'abord été réalisées avec le forçage de type batteur en forçant la vitesse horizontale sur le bord gauche (vertical) à $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$, avec $U_0 = 10^{-3} m.s^{-1}$. Un premier attracteur a été obtenu mais le résultat n'était pas satisfaisant : Pr était encore trop bas et on pouvait observer que le fait de forcer la vitesse sur une des frontières annulait la condition de glissement sans frottement et qu'une couche limite se développait sur les bords gauche et droit. Cela entraînait que des faisceaux d'ondes de faibles amplitudes étaient émis des coins et altéraient le champ de vitesse.

Notre but était cependant de tendre vers une reproduction de l'oscillation verticale de la cuve, concrètement en modulant la gravité : $g(t) = g_0 + 4\omega^2 A \cos(2\omega t)$, A étant l'amplitude du mouvement d'oscillation de la cuve. Il a été tenté de reproduire les conditions de Cambridge, à savoir $A = 6 cm$, mais en plus du problème des couches diffusives à la surface et au fond, des structures vorticielles apparaissaient sur la paroi inclinée. Ces structures créaient des courants barotropes qui détruisaient la structure de l'attracteur que nous obtenions.

C'est arrivé à ce stade que je me suis rendu pour quelques jours au DAMTP de Cambridge assister et participer aux expériences en cours. Je suis arrivé au moment où ils venaient de mettre en place un nouveau type de forçage, une oscillation horizontale de la cuve qui offrait l'avantage d'avoir un système mécanique plus simple d'utilisation et beaucoup plus précis. Il constataient de plus que le comportement des ondes n'en était pas affecté. Le batteur de nos simulations se rapprochait le plus de ce type de forçage et était aussi celui qui permettait d'obtenir les résultats les plus clairs, il a donc été préféré pour la suite.

Augmenter Pr a été l'étape qui nous a finalement permis d'obtenir l'attracteur. Comme les résultats obtenus sont indissociables de leur validation, ils vont être présentés dans la suite en même temps que leur comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus au DAMTP.

4.2 Résultats obtenus et comparaison avec l'expérience

Tous les résultats expérimentaux ainsi que leur modélisation sont issus de Hazewinkel *et al.* [5]. La démarche de l'article a donc été reproduite ici dans ses grands traits, et le fait que les deux expériences soient réalisées avec des paramètres et des forçages différents n'a pas empêché de comparaison efficace.

On rappelle que les expériences qui font l'objet de l'article [5] utilisent la cuve 2, avec $N = 3 \text{ rad.s}^{-1}$, une fréquence d'excitation $\omega_e = 1,23 \text{ rad.s}^{-1}$, $H = 20 \text{ cm}$ et une amplitude de forçage $A_e = 6,0 \text{ cm}$. Il se trouve que les ondes ont été excitées à une fréquence $\omega = \omega_e$, et non la moitié, probablement car d'une part le système mécanique avait du jeu lors du mouvement de translation verticale qui excitait le mode fondamental des ondes de surface à ω_e qui à son tour excitait des ondes internes et que d'autre part le forçage n'était pas assez fort pour que l'instabilité paramétrique puisse concurrencer ce mode¹⁰.

4.2.1 Vérification préliminaire

La première chose à faire a été de vérifier si les résultats dépendaient de la résolution. L'énergie totale moyenne du fluide $\langle E \rangle = \langle E_{cin} + E_{pot} \rangle$ dans le domaine a été mesurée pendant la phase stationnaire de $t = 35T$ à $t = 60T$ pour les deux résolutions que nous avons employé, ainsi qu'une troisième de 1000×1000 points que nous n'avons pas encore analysé :

- grille 200×200 : $\langle E \rangle = 0,101 \text{ mJ}$
- grille 200×200 : $\langle E \rangle = 0,122 \text{ mJ}$
- grille 200×200 : $\langle E \rangle = 0,131 \text{ mJ}$

Les valeurs en soi n'ont pas grande signification si on ne les compare pas à une énergie de référence, celle du forçage par exemple mais leur comparaison entre elles est intéressante. Il y a 17% d'écart entre la première et la deuxième grille et 7% d'écart entre la deuxième et la troisième grille. Les résultats dépendent donc peu des résolutions employées, d'autant plus que celle-ci augmente. Les effets visqueux de petite échelle sont donc correctement pris en compte et le faible écart entre les deux dernière grilles montre que 500×500 points de grille sont acceptables.

4.2.2 Allure du champ de perturbation de densité et évolution temporelle

Premières observations Dans les expériences de Cambridge, les déplacements de fluide sont visualisés en observant par fluctuations d'indice optique, et donc de

¹⁰Ce qui les a conduit à changer de mode de forçage.

densité. Pour faciliter la comparaison, c'est donc via le champ de fluctuations de densité normalisé que l'on va visualiser nos propres résultats. Ce champ se définit comme :

$$b(x, z, t) = \frac{\rho(x, z, t) - \rho_0(z)}{\rho_0(z)} = -\alpha (T(x, z, t) - T_0(z))$$

L'indice 0 se réfère au champ à l'équilibre hydrostatique. Un attracteur est observé dans nos simulations que la fig. 11 présente en phase stationnaire. La trajectoire de l'attracteur suit bien la prédiction du code de rayons (cf. section 2.2.2). L'onde est en phase tout le long de l'attracteur, l'amplitude est maximale près de la paroi inclinée et s'atténue le long du parcours de l'attracteur¹¹. Enfin, si on regarde ce champ au cours du temps, on voit que la phase se propage selon \mathbf{c}_ϕ comme indiqué en fig. 11.

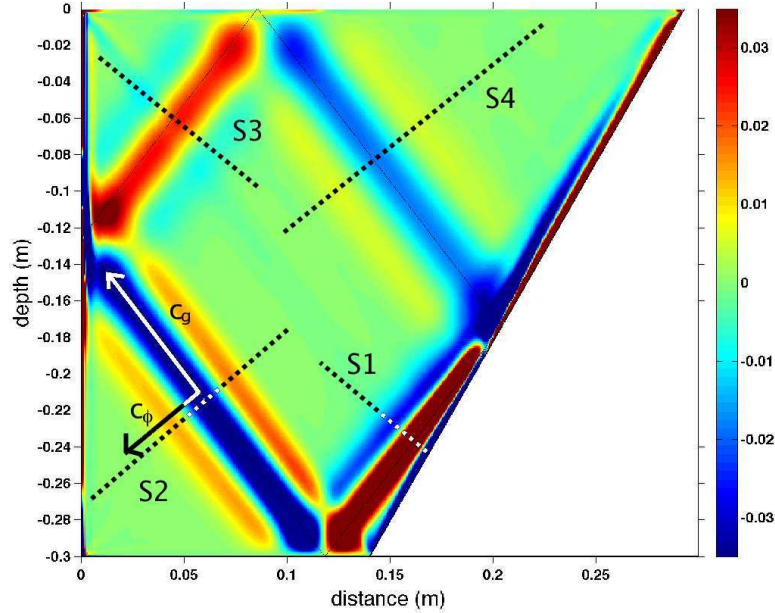


FIG. 11: Image de $\partial_x b$ au temps $t = 60T$. \mathbf{c}_g et \mathbf{c}_ϕ sont indiqués en flèches pleines. Les lignes tiretées représentent les positions de sections qui seront utiles par la suite. La ligne continue au centre de l'attracteur est la prédiction théorique du code de rayons.

L'évolution au cours du temps est aussi intéressante. Les simulations ont été menées sur 60 périodes avec forçage, puis 40 périodes après avoir coupé le forçage. Ceci est assez proche de ce qui a été fait à Cambridge, où le forçage a duré 50

¹¹En toute rigueur, il n'est pas possible d'affirmer une telle chose sans avoir examiné les données au cours du temps car le paquet d'ondes où l'intensité du champ est maximale pourrait se déplacer selon \mathbf{c}_g ; ici, le fait que le champ soit en phase tout au long de l'attracteur ($\mathbf{c}_\phi \perp \mathbf{c}_g$) rend cette démarche inutile tant que l'on reste au niveau qualitatif.

périodes puis a été coupé et les mesures poursuivies sur 40 périodes. On observe ainsi dans les deux cas une phase de croissance du champ pendant les 30 premières périodes, puis une phase stationnaire et, une fois que le forçage est coupé, une phase de décroissance, comme on peut le voir en fig. 12.

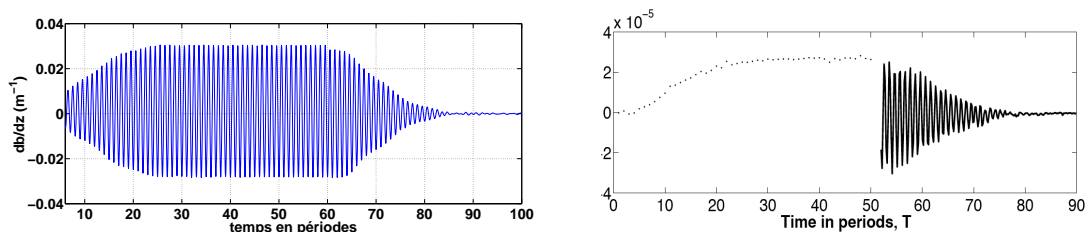


FIG. 12: À gauche, évolution de $\partial_x b$ en fonction du temps au point $(x; z) = (0, 0672 m; -0, 2244)$; à droite, son équivalent expérimental qui ne comporte qu'un point de mesure par période pendant le forçage et 125 points/période pendant la phase de décroissance.

L'évolution de la structure spatiale au cours du temps attire l'attention, notamment lors de la phase de décroissance où l'on voit la longueur d'onde diminuer. Pour éclairer ce point, quelques instantanés ainsi que leur homologues expérimentaux sont présentés en fig. 13. On remarquera au passage la grande similarité entre les champs expérimentaux et simulés.

Analyse spectrale Pour caractériser la structure spatiale transverse de l'attracteur, des analyses de Fourier spatiales ont été réalisées le long des sections $S1$ à $S4$ (cf. fig. 11). On suppose donc que sur une section Si , $\partial_z b$ peut s'écrire :

$$\partial_z b_i(\eta, t) = \int_{Si} A(k) e^{i(k\eta - \omega t)} dk$$

avec k la norme de \mathbf{k} et η la coordonnée de l'axe qui serait perpendiculaire à une branche et orienté selon \mathbf{c}_ϕ .

En figs. 14 et 15, différents profils spectraux sont tracés. Une première remarque est qu'il ne sont pas monochromatiques : ils comportent un maximum et donc une longueur d'onde dominante que l'on peut assimiler à celle que l'on "voit" dans l'attracteur, mais on a un *continuum de longueurs d'ondes*, et non un pic d'une certaine largeur. Ceci est lié au fait que monochromatisme temporel n'implique pas monochromatisme spatial et va permettre d'expliquer à ce phénomène de variation apparente de k .

Une analyse pour chaque section, à un instant donné, comme en fig. 14, montre que l'intégrale du profil spectral diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne

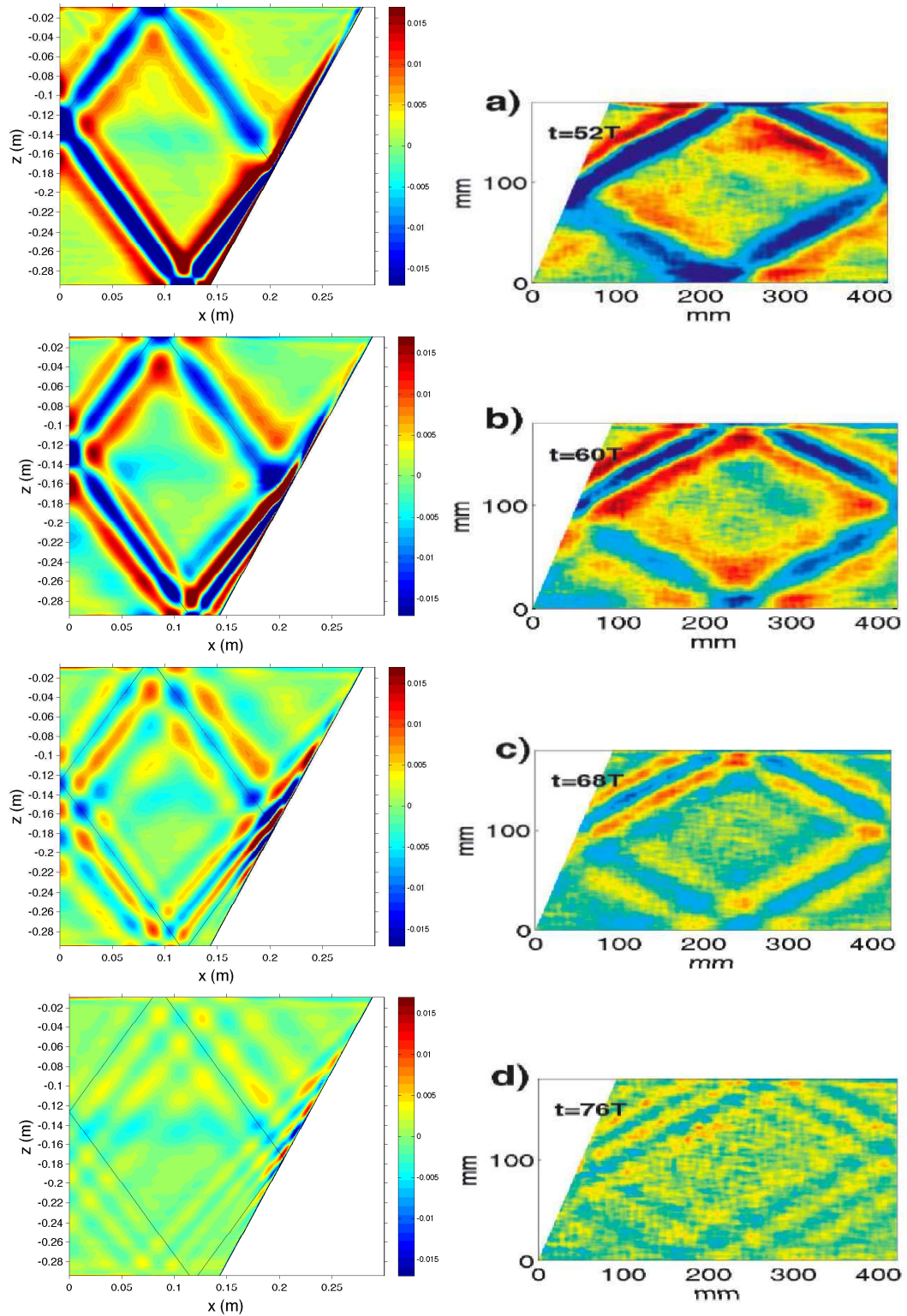


FIG. 13: Quatre étapes de la décroissance de $\partial_z b$. À gauche, résultats obtenus par simulation ; à droite, résultats obtenus à Cambridge. Les quatre étapes sont : a) 2 périodes — b) 10 périodes — c) 18 périodes — d) 26 périodes après que le forçage ait été coupé.

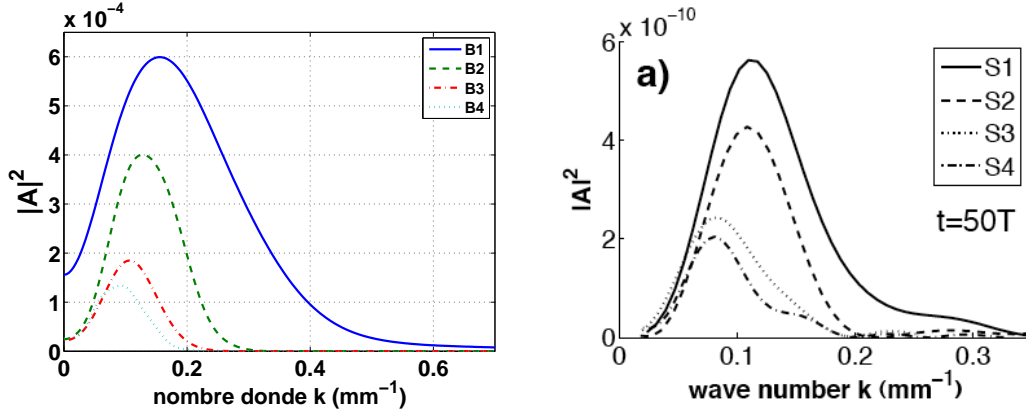


FIG. 14: Évolution du profil spectral transverse de $\partial_z b$ en fonction de l'éloignement à la réflexion focalisante, les positions de S1-S4 sont données fig. 11. À gauche, résultats des simulations à $t = 60T$; à droite, résultats expérimentaux à $t = 50T$.

de l'attracteur, mais aussi que le maximum du profil se décale vers les grandes longueurs d'ondes. Cela ne veut pas dire que de nouvelles longueurs d'ondes plus grandes sont créées car tous les profils restent à l'intérieur du profil de S1, mais que les grandes longueurs d'ondes sont *moins atténuées* que les petites, ce qui fait penser à un mécanisme de dissipation visqueuse. De plus, ceci s'accorde avec le fait que la largeur de l'attracteur augmente lorsqu'on s'éloigne du pan incliné comme on peut le voir en figs. 11 et 13.

La fig. 15 présente une analyse *sur une section donnée de l'attracteur au cours du temps* pendant la phase de décroissance. On observe que les profils spectraux diminuent en amplitude totale mais cette fois le maximum se décale vers les grands k , ce qui est conforme à ce qu'on observe en fig. 13. Ici, ce n'est pas que l'énergie est transmise vers des k plus grands, mais que les k les plus faibles disparaissent plus vite.

Conclusion de nos observations Nous avons pu voir dans les différentes figures présentées que les comportements des attracteurs expérimentaux et simulés sont très similaires se sorte que les simulations semblent se révéler des outils dont les résultats sont très proches de la réalité. Un modèle simple de comportement des attracteurs a été développé par Hazewinkel *et al.* [5], qui s'est révélé satisfaisant lorsqu'appliqué aux résultats expérimentaux. Nous allons donc maintenant voir si ce modèle est applicable à nos résultats numériques, afin de valider quantitativement l'expérience.

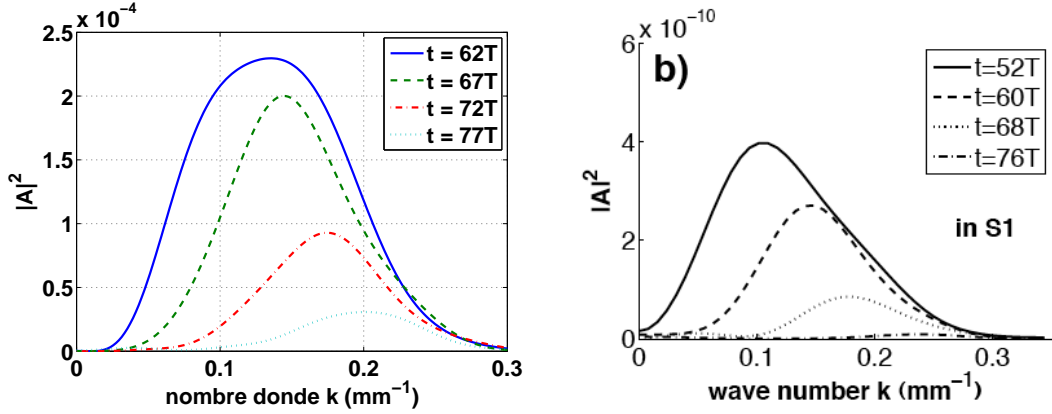


FIG. 15: Évolution temporelle du profil spectral transverse de $\partial_z b$. À droite, résultats expérimentaux pris en S1, là où l'intensité du signal est la plus forte ; à gauche, résultats simulés, pris en S2 (il n'a pas été judicieux de se placer en S1 car l'attracteur longe la paroi en cet endroit et les profils spectraux sont plus durs à interpréter).

4.2.3 Modèle de comportement de l'attracteur

Principe Le modèle s'inspire directement des observations de la section précédente et raisonne en termes de paquets d'ondes. Il postule que le forçage excite un paquet d'ondes à un k faible, typiquement $k_0 = \pi/H$, le mode fondamental de la cuve (cf. Benielli [1]). Le paquet d'onde se réfléchit ensuite contre la paroi inclinée et voit son k augmenter d'un facteur γ , ainsi que son amplitude (cf. eq. [2]). En parallèle, la viscosité agit et atténue l'amplitude de ce paquet d'onde, d'autant plus que k est grand. La biographie d'un paquet est donc la naissance avec un k et une amplitude faibles, une propagation selon \mathbf{c}_g , une atténuation visqueuse encore faible tant que k reste faible, ainsi que des réflexions successives contre la paroi inclinée qui font que k ainsi que A augmentent comme γ^n (n étant le nombre de réflexions focalisantes qu'a subi le paquet d'onde). Lorsque k devient élevé, la viscosité devient le phénomène dominant et l'atténuation de A qu'elle provoque pendant la propagation l'emporte sur l'augmentation de A lors des réflexions, d'autant plus que k continue d'augmenter au fur et à mesure des réflexions. Le paquet d'ondes finit donc sa vie, victime de la viscosité qui ne permet pas que k augmente indéfiniment. Nous allons voir que ce modèle explique bien les profils spectraux à l'équilibre, ainsi que leur évolution dans le temps en phase non-stationnaire. Au préalable, posons quelques définitions.

Nous avons dit que partant d'un mode k_0 , k augmentait d'un facteur γ à chaque réflexion, donc après n réflexions :

$$k_n = \gamma k_{n-1} = \gamma^n k_0 \quad ([5])$$

Le temps que met un paquet d'onde de nombre d'onde k à parcourir l'attracteur sur sa longueur L_a est :

$$t_{tour}(k) = \frac{L_a}{\|\mathbf{c}_g\|} = \frac{L_a k}{N \sin \theta} \quad ([6])$$

En combinant les équations [5] et [6], on trouve que le temps qui s'est écoulé depuis que le paquet d'onde avait pour nombre d'onde k_0 , au moment de sa n^e réflexion (son âge en quelque sorte) est :

$$t_{tot}(k_n) = \sum_{i=1}^n t_{tour}(k_i) = \sum_{i=0}^n \frac{L_a \gamma^i k_0}{N \sin \theta} = \frac{L_a k_0 \gamma}{N \sin \theta} \frac{1 - \gamma^n}{1 - \gamma} \quad ([7])$$

Phase stationnaire Nous allons nous intéresser à la forme des spectres observés à l'équilibre ($t = 35T$ à $t = 60T$). On suppose qu'en phase stationnaire, des paquets d'ondes naissent et meurent en permanence et qu'un équilibre entre focalisation et dissipation s'installe : l'axe des k donne en quelque sorte l'âge du paquet d'ondes, et l'amplitude associée renseigne sur les phénomène dominant à cette échelle. Rieutord *et al.* [13] ont étudié le cas d'un paquet d'ondes de nombre d'onde k se propageant le long d'un attracteur, calculant la dissipation visqueuse qu'il subit au cours du temps tant qu'il ne subit pas de réflexions (dé)focalisantes :

$$A(k) = A_0 e^{-\nu k^2 t} = A_0 e^{-\frac{\nu s k^3}{N \sin \theta}} = A_0 e^{-\sigma s k^3}$$

où $\sigma = \frac{\nu}{N \sin \theta}$ et s est la position du paquet d'ondes sur l'attracteur au temps s est l'abscisse curviligne de la position du paquet d'onde, l'origine se trouvant à l'intersection entre attracteur et paroi inclinée et l'orientation étant choisie selon \mathbf{c}_g .

Ainsi, à chaque réflexion focalisante, le flux d'énergie est conservé, donc en tenant compte de la focalisation du faisceau, $\Pi^r = \gamma \Pi^i$ où Π est l'amplitude du vecteur de Poynting dont l'expression est $\Pi = \rho \|\mathbf{c}_g\| U^2 / 2$ où U est l'amplitude de la vitesse instantanée du fluide, qui est proportionnelle à celle du déplacement au cours du temps, et donc à celle de b que l'on note B . Nous avons jusqu'ici visualisé $\partial_z b$ dont l'amplitude A est proportionnelle à kB , et donc à kU . En revenant à la la relation d'amplification du vecteur de Poynting, on déduit que la quantité $|A(k)|^2 / k^3$ se conserve.

$$|A(k_n, s = 0)|^2 = |A(k_{n-1}, s = 0)|^2 \gamma^3 e^{-2\sigma L_a k_n^3}$$

Cette formule n'est pas valable pour $n = 1$ car le paquet d'onde pour $n = 0$ n'est pas généré au point de réflexion contre la paroi inclinée mais dans toute la cuve,

et donc la dissipation visqueuse ne se calcule pas si simplement. Pour simplifier, nous partons donc de $n = 1$ et noterons $|A(k_1, s = 0)| = A_1$.

$$\begin{aligned} |A(k_n, s = 0)|^2 &= A_1^2 \gamma^{3(n-1)} \exp\left(-2\sigma L_a k_0^3 \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^{3i}\right) \\ &= \frac{A_1^2}{k_0^2} k_{n-1}^3 \exp\left(-2\sigma L_a k_0^3 \gamma^3 \frac{\gamma^{3(n-1)} - 1}{\gamma^3 - 1}\right) \end{aligned}$$

Dans nos analyses, comme expliqué en fig. 15 nous avons dû nous placer en $S2$, un endroit éloigné de la réflexion, au contraire des analyses menées en [5]. Il a fallu donc compléter le modèle pour calculer A en tout point de l'attracteur. Si on se place en un point quelconque s de l'attracteur :

$$|A(k_n, s)|^2 = |A(k_n, s = 0)|^2 e^{-2\sigma s k_n^3} = \Xi k_n^3 e^{-\beta(s)k_n^3} \quad ([8])$$

avec $\beta(s) = 2\left(s + \frac{L_a}{\gamma^3 - 1}\right)\sigma$ et $\Xi = \frac{A_1^2}{(\gamma k_0)^3} \exp\left(-\frac{2L_a \sigma \gamma^3 k_0^3}{\gamma^3 - 1}\right)$.

On trouve enfin l'équation du profil en remplaçant k_n par k . A_1 n'est pas connue donc la comparaison entre modèle analytique et simulations doit se faire avec des profils normalisés à la même valeur. La comparaison faite en fig. 16 est concluante dans l'expérience comme dans la simulation. Dans l'expérience, le décalage aux grands k est expliqué par les auteurs comme étant du bruit. Si la partie "plate" fait en effet penser à un bruit blanc, le fait est que dans les simulations, qui ne sont pas bruitées, il y a quand même un décalage après le maximum. Ce décalage n'est pas à rapprocher d'un bruit blanc, mais il y a peut-être deux contributions différentes à celui-ci dans les données expérimentales. Quant au décalage qui existe dans les simulations aux faibles k , il est très dépendant de la manière de tracer les transformées de Fourier. Globalement, l'accord entre le modèle analytique et les données, qu'elles soient numériques ou expérimentales, est très bon, les positions des maxima des profils concordent de manière excellente et les largeurs des profils sont tout à fait comparables.

Phases non-stationnaires Nous allons nous intéresser pour finir au comportement des longueurs d'onde pendant les phases de croissance ($t = 0 - 35T$) et de décroissance ($t = 60T - 100T$). En fig. 17, l'évolution temporelle des profils spectraux simulés et expérimentaux sont représentés.

En plaçant l'origine des temps à la fin du forçage et en partant des grandes longueurs d'ondes, on voit que t_{tour} longe le bord extérieur du spectre. Cela veut dire que le paquet d'ondes qui naît à la fin du forçage est le dernier : au fil temps,

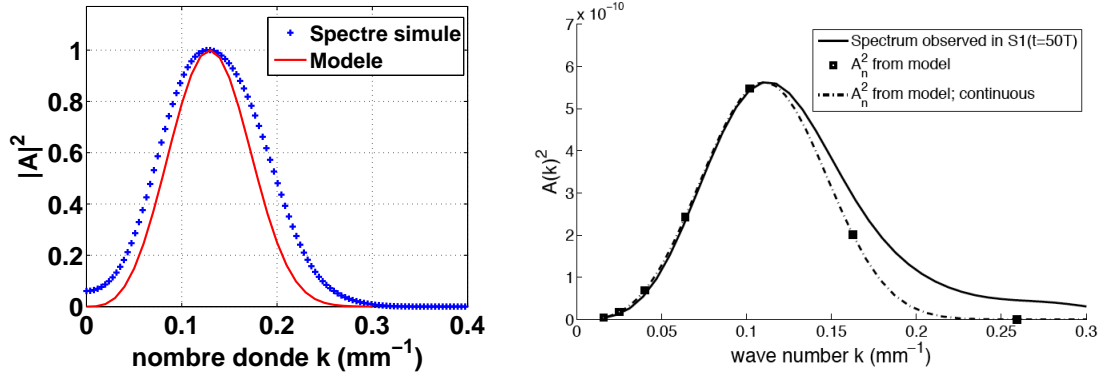


FIG. 16: Comparaison entre $|A(k)|^2$ du spectre d'équilibre et du modèle analytique. À gauche, résultats issus des simulations en S2 à $t = 60T$, profils normalisés à l'unité; à droite, résultats issus des expériences en S1, les données issues du modèle sont normalisées de manière à coller au mieux à la courbe.

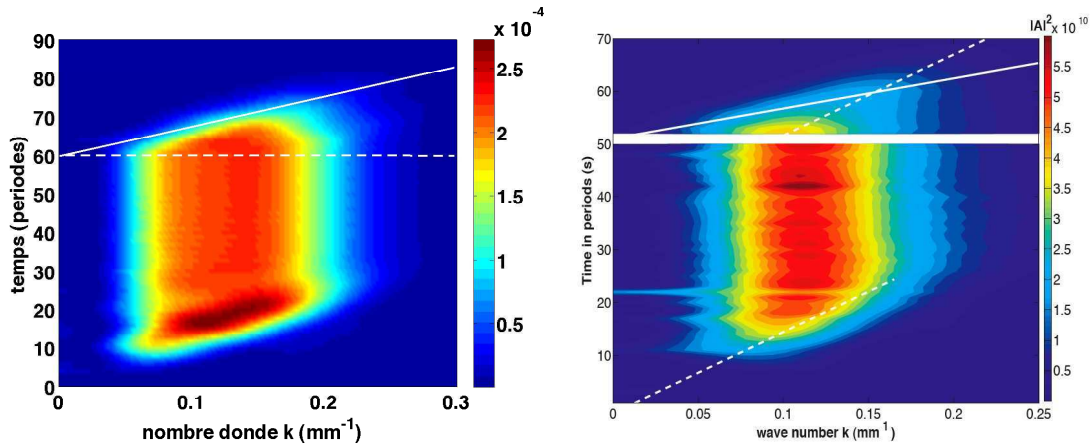


FIG. 17: Évolution des profils spectraux au fil du temps. À gauche, résultats des simulations en S2. La ligne solide représente $t_{tour}(k)$, la ligne pointillée matérialise la coupure du forçage. À droite, résultats des expériences en S1. La ligne solide est $t_{tour}(k)$, les lignes pointillées $t_{tot}(k)$.

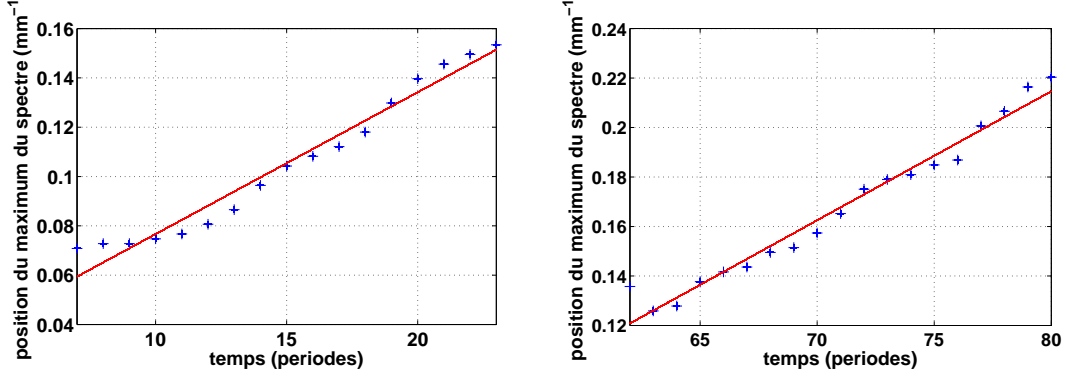


FIG. 18: Évolution de la position du maximum du spectre au fil du temps en S2. À gauche, croissance ; à droite, décroissance. Les points sont les données et les lignes solides les ajustements linéaires

les k de plus en plus élevés disparaissent à mesure que ce dernier paquet d'ondes voit son k augmenter.

Toujours en fig. 17, on voit que la position k_m du maximum du spectre augmente (diminue) en phase de (dé)croissance en suivant approximativement t_{tot} dans les données expérimentales. Dans les données simulées, l'accord est moins bon. En effet, le coefficient directeur de la droite $k = f(t_{tot})$ est égal, selon le modèle, à $9,50 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \cdot \text{periodes}^{-1}$. Les graphes de $k_m = f(t_{tot})$ ont été tracés en fig. 18. Les régressions linéaires donnent des coefficients directeurs de $(5,8 \pm 0,6) \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \cdot \text{prd}^{-1}$ pour la phase de croissance et $(5,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1} \cdot \text{prd}^{-1}$ pour la phase de décroissance. Bien que la valeur soit presque moitié moins que celle prédite, l'ordre de grandeur reste bon. L'écart s'explique peut-être par le fait que nous ne regardions pas au bon endroit : en effet, le raisonnement est de dire que nous suivons dans le temps la position de k_m car elle est plus aisément repérable. Pour cela, il faudrait plutôt se placer en différents endroits, en des temps judicieusement choisis pour suivre le paquet d'ondes qui a eu l'amplitude maximale, en tenant compte du fait que la viscosité tend à décaler le maximum du spectre vers les k faibles (cf. fig. 14).

Conclusion L'accord entre données en cuve et données numériques s'est révélé très satisfaisant sur de nombreux points, y compris sur des critères quantitatifs. Les critères sur lesquels il n'y a pas complètement accord sont sujet à discussion et on peut même avancer que la comparaison a permis de donner des perspectives d'amélioration du modèle développé par Hazewinkel *et al.* [5]. Cette étude est unique jusqu'à présent, la simulation numérique *directe* d'un attracteur n'ayant encore jamais été réalisée malgré l'intérêt que ce domaine suscite en géo- et astro-

physique. Il faut insister sur le fait que cette étape, longue et sans rapport direct avec des thématiques géophysiques, a cependant été nécessaire avant de se lancer dans des études plus originales. La partie suivante sera une ouverture sur les propriétés de mélange qui ont pu être observées dans le peu de temps qui nous restait, afin d'évoquer les potentialités de cette expérience dans un contexte plus géophysique.

5 Non-linéarités et mélange

Il est extrêmement difficile de mélanger un fluide stablement stratifié. Les cuves de Cambridge pouvaient être déplacées pleines sans prendre de précautions particulières et l'océan est aussi très difficile à mélanger verticalement. Or, une des composantes fondamentales de la circulation thermohaline est qu'il doit se produire des remontées d'eaux profondes froides, et on conçoit mal comment précisément elles réussissent à vaincre la stratification. Les ondes internes sont supposées avoir un rôle primordial car elles peuvent provoquer du mélange par déferlement. Dans le cas d'une onde de surface, à l'approche d'une plage, l'énergie se concentre sur une faible hauteur. Le déferlement se produit lorsque la crête de la vague va plus haut que la base et finit par se retrouver au-dessus du vide. Dans notre attracteur, l'énergie se concentre aussi dans une zone très localisée de l'espace et le déferlement se produit lorsque l'amplitude du mouvement devient suffisamment grande pour que les isopycnes se retournent et qu'une particule atteigne un point où elle est plus légère (lourde) que le fluide au-dessous (au-dessus) d'elle¹². Pour les ondes de surface et internes, le déferlement est signe de leur caractère non-linéaire. Leur étude accompagne donc obligatoirement l'étude du mélange.

Nous avons en tête d'étudier d'abord des effets linéaires, d'une part pour pouvoir comparer nos résultats aux résultats de Cambridge, d'autre part car introduire moins d'énergie dans le système présentait moins de risque de rendre le code instable. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'aller beaucoup plus loin. À des niveaux très faibles, des non-linéarités et du mélange sont tout de même observés. Nous allons présenter des observations sur la simulation que nous avons analysé dans un premier temps, puis évoquer une simulation qui permet d'entrevoir les potentialités qu'offrent des expériences numériques pour l'étude du mélange.

¹²cf. Gostiaux [3] pour une approche plus détaillée et quantitative

5.1 Existence de non-linéarités

Nous avons réalisé une analyse spectrale temporelle de $\partial_z b(x_1, z_1, t)$ pendant la phase stationnaire, le point $(x_1; z_1) = (0,0672 m; -0.2244 m)$ étant situé au début de la deuxième branche après réflexion. Cela représente 25 périodes avec 19 points/période. On voit en fig. 19 qu'il y a deux harmoniques à la fréquence double et triple du fondamental ainsi qu'un léger sous-harmonique à la fréquence moitié. Les harmoniques sont à une fréquence supérieure à N et ne peuvent donc pas engendrer de phénomènes propagatifs : ils restent piégés dans l'attracteur. Quant au sous-harmonique, il est trop faible pour donner naissance à des faisceaux visibles.

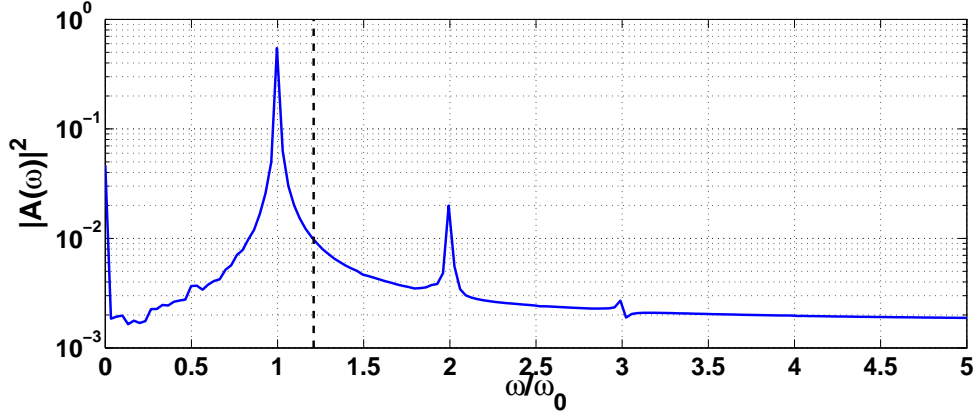


FIG. 19: Analyse spectrale temporelle de $\partial_z b(t)$ au point $(x_1; z_1) = (0,0672 m; -0.2244 m)$. Le fondamental est noté ω_0 , au lieu de ω dans le texte. La ligne verticale représente N .

L'énergie associée au premier harmonique est 30 fois inférieure à celle du fondamental et celle associée au deuxième harmonique est 200 fois inférieure. Ces harmoniques sont donc très faibles, mais nous allons voir que le fluide est mélangé de manière très subtile.

5.2 Mise en évidence du mélange

En fig. 13, on voit que sur la dernière image une couche horizontale se dessine à mi-hauteur environ de la cuve donc $\partial_z b$ et par conséquent la stratification ont été modifiées à cet endroit, signe que du mélange s'est produit. La fig. 20 représente N lorsque le fluide est retourné au repos. On y voit que du mélange s'est produit autour de la profondeur où se situe la réflexion contre la paroi verticale. On se

serait attendu à ce qu'il se produise au niveau de la réflexion focalisante puis de la première branche, là où l'énergie est la plus concentrée et les déferlements plus susceptibles de se produire. Si l'on regarde de plus près en fig. 13, on voit qu'en effet autour de ce point, une anomalie est présente sur les quatre images. Un début d'explication serait qu'à l'endroit de la réflexion de l'attracteur sur la paroi verticale, la couche limite contre la paroi¹³ est le siège des cisaillements les plus importants et donc les non-linéarités y sont les plus fortes, d'où un mélange favorisé¹⁴. En tout cas, on voit bien que du mélange s'est produit, à un niveau très faible cependant.

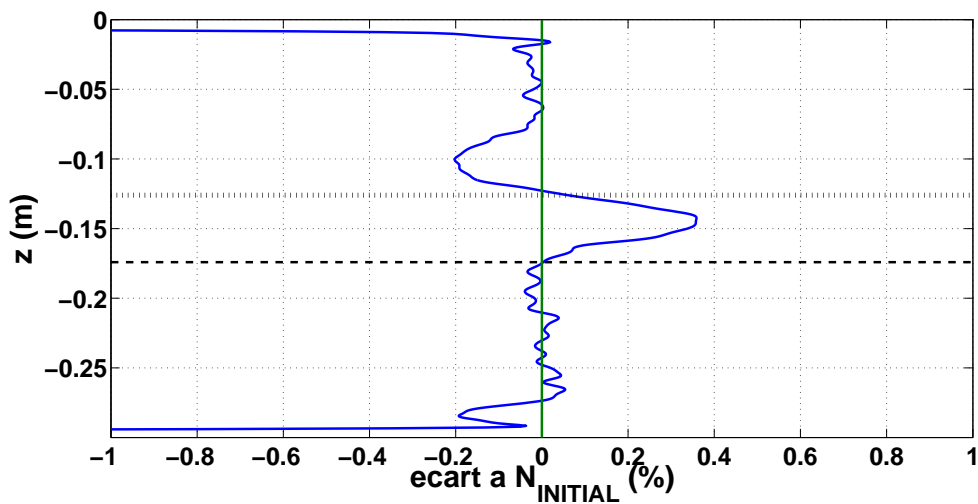


FIG. 20: Tracé de l'écart de $N(z)$ à N une fois que le fluide est retourné au repos, 40 périodes après que le forçage ait été coupé. On voit les couches de diffusion au fond et à la surface. La ligne en tirets longs est la profondeur de la réflexion contre la paroi inclinée et la ligne en tirets courts la profondeur de la réflexion contre la paroi verticale.

5.3 Perspectives

La souplesse des expériences numériques rend possible de créer des situations qu'il ne serait pas possible de mettre en place en cuve aisément. Nous avons par curiosité lancé la même simulation que celle dont il a été question jusqu'ici en divisant la viscosité par 10. L'onde de cisaillement qu'est l'onde interne est alors

¹³qui existe car la condition aux limites de glissement sans frottement ne fonctionne pas pendant que le forçage est enclenché

¹⁴cf. Noir *et al* [12].

sujette à une instabilité qui ressemble à celle de Kelvin-Helmholtz, au moins dans sa phase de formation (cf. fig. 21, droite).

En fig. 21 à gauche, le champ $\|\nabla b\|$ est présenté à $t = 60T$. On observe que la première branche de l'attracteur est complètement déstabilisée, mais pas l'attracteur dans son ensemble. En plus de l'attracteur observé précédemment, des faisceaux sous-harmoniques plus inclinés sont émis. Un calcul des fréquences qui y sont associées est réalisé à l'aide de l'outil de mesure d'angles du logiciel Gimp et de la relation de dispersion [1]. La pulsation ω_{id} associée au faisceau dont l'origine est approximativement dans le coin inférieur droit de la cuve est telle que $\omega_{id}/\omega = 0,52 \pm 0,03$, soit environ $1/2$, et donc peut se rattacher à de l'instabilité paramétrique. Le faisceau qui se réfléchit approximativement à l'endroit de la réflexion entre attracteur et paroi verticale possède lui une pulsation telle que $\omega_{rv}/\omega = 0,42 \pm 0,04$. Or N est restée à peu près constant dans cette zone, sinon les faisceaux du fondamental auraient aussi modifié leur angle. Il est donc possible qu'un autre processus d'émission que l'instabilité paramétrique génère des ondes à $\omega_{rv} < \omega$.

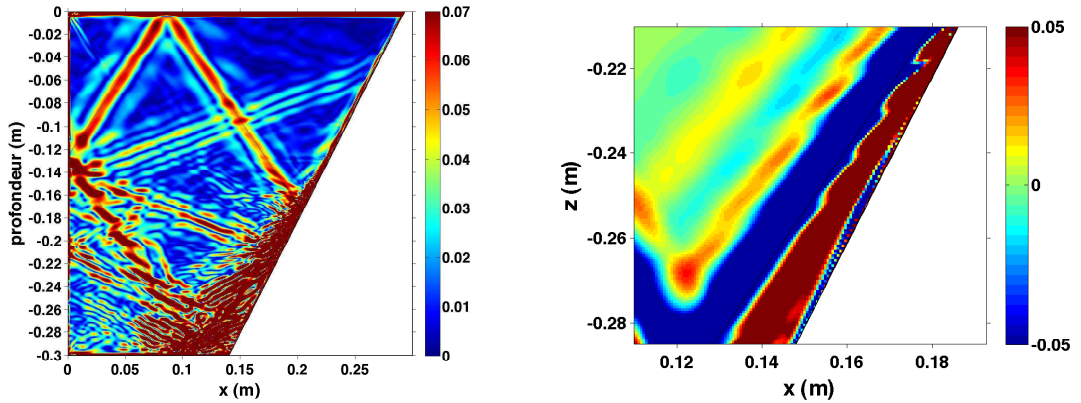


FIG. 21: À gauche, champ $\|\nabla b\|$ avec $\nu = 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ après 60 périodes de forçage ; à droite, agrandissement du champ $\partial_x b$ de l'attracteur pendant le développement de l'instabilité.

En fig. 22, on voit que N a cette fois été beaucoup plus modifié, comme on pouvait s'y attendre. L'endroit où le mélange s'est produit reste le même mais l'intensité du mélange est difficile à comparer à la situation précédente du fait de la modification de ν qui a modifié les temps caractéristiques de l'écoulement sans que l'on ait modifié les paramètres temporels de la simulation (T , durée de la simulation, etc.). La forçage avait aussi duré 60 périodes et pas de régime stationnaire n'avait été atteint, les processus de mélange n'étaient pas forcément les mêmes, et il a fallu attendre 160 périodes pour que le fluide retourne au repos.

Pour ajouter à la difficulté de la comparaison, des nombres adimensionnés sont difficiles à construire dans une situation aussi complexe.

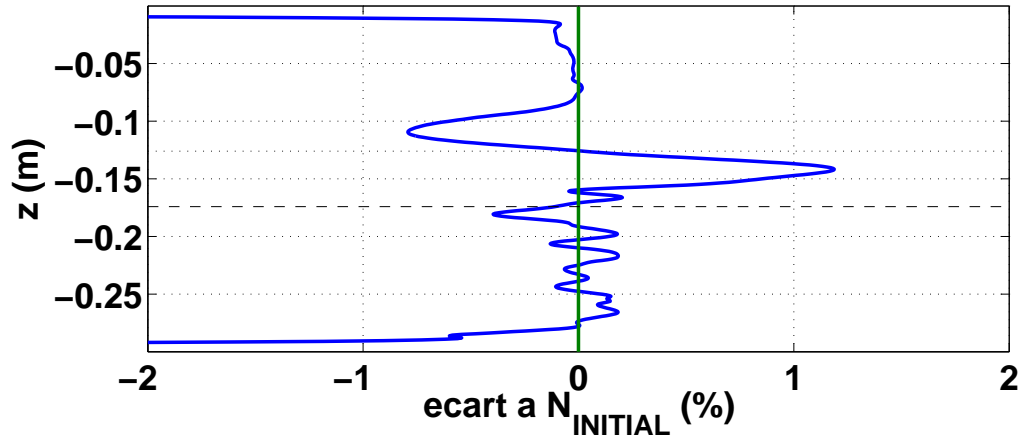


FIG. 22: Écart de $N(z)$ à N_{initial} une fois que le fluide est retourné au repos, 160 périodes après que le forçage ait été coupé.

Cette dernière expérience et les questions qu'elle soulève montrent les potentialités qu'offre la réalisation de simulations numériques fiables.

Conclusion et discussion

Le principal résultat de ce stage est la simulation numérique d'un attracteur, chose qui n'avait jamais été réalisée en simulation directe, alors que la seule approximation prise en compte par notre code est l'incompressibilité. Beaucoup de précautions ont été prises pour s'assurer que les résultats obtenus étaient corrects : avant les simulations, un travail approfondi sur la manière d'adapter le code a du être mené, ainsi qu'une estimation de la forme théorique de l'attracteur. Une fois l'attracteur obtenu, la comparaison avec les expériences en cuves du DAMPT a permis de voir que les simulations étaient compatibles avec la réalité, et il est même possible que quelques précisions puissent être apportées au modèle analytique développé par nos collaborateurs. Enfin, nous avons ouvert sur les perspectives qu'offrent ces simulations sur l'étude des phénomènes non-linéaires, plus susceptibles d'intéresser des océanographes.

Ce type d'expérience s'inscrit dans un cadre un peu plus large et différentes configurations sont testées dans les cuves du DAMPT, le but à moyen et long terme

étant d'appliquer les connaissances acquises à des configurations océaniques méso-échelles, et ceci ne pourra se passer de simulations numériques à haute résolution. Ainsi nous avons choisi un cuve de forme simple pour isoler les problèmes¹⁵ mais il est prévu dans les prochains mois de simuler des expériences réalisées dans une cuve 2D à profil parabolique. Cette expérience, simulée à l'échelle de la cuve et à plus grande échelle, pourrait modéliser des zones comme le canal du Mozambique ou la fosse des Féroé qui sont susceptibles de présenter des attracteurs.

Remerciements Tout d'abord, je dois remercier Chantal Staquet dont le travail d'encadrement a été réellement quotidien. Jamais en 5 mois un appel au secours n'a attendu de réponse plus de 24 heures, et la qualité des réponses a permis à ce travail d'avancer à une vitesse relativement élevée. Son optimisme ne l'a jamais quitté aux moments où je doutais de la possibilité de réussite de l'expérience et enfin, la souplesse de son approche a fait que malgré nos personnalités relativement différentes, travailler ensemble fut extrêmement agréable en plus d'être pour moi très enrichissant. Ivane Pairaud, qui avait déjà acquis une bonne maîtrise du MITgcm, s'est donné beaucoup de mal pour me transmettre cette maîtrise d'une part, mais en plus pour comprendre les points du code dont elle n'avait pas l'utilité afin de m'aider à résoudre mes propres problème. En en chapeautant tous les aspects techniques, elle a réellement été co-encadrante de ce stage. Je remercie ensuite Jeroen Hazewinkel, son dynamisme son enthousiasme qui ont fait que mon court séjour à Cambridge a été une expérience enrichissante, et sa disponibilité m'a beaucoup aidé pour la rédaction de ce rapport. Leo Maas pour nous donner des pistes de travail et répondre à mes questions, j'espère le rencontrer prochainement. Louis Gostiaux m'a chaleureusement permis de puiser amplement dans sa thèse pour toutes les explications théoriques de ce rapport. Il me faut ensuite remercier l'équipe du DAMPT et particulièrement Stuart DALZIEL pour leur accueil et leurs suggestions au moment où mes simulations rencontraient des difficultés. Enfin, je remercie Jean-Michel CAMPIN pour son aide précieuse dans un moment crucial.

Enfin, le trombinoscope ne serait pas complet si on omettait la bande de joyeux drilles qui composaient les effectifs de ce M2. Mon moral n'a jamais quitté un niveau élevé, ce qui aurait été impossible sans eux. Je remercie donc Nonoss pour avoir sacrifié la caution de son appart afin que nous passions des bons moments cullinaro-artistiques dans le respect de l'Amitié, Nenez pour sa bêtise, entre une meilleure compréhension du système hydrologique ouest-africain grâce une expérience de terrain et son système digestif, son choix ne fut entaché d'aucune

¹⁵Encore qu'une application en ingénierie à la sélection de l'endroit où les sédiments se déposent dans les réservoirs de barrages hydroélectriques a été évoquée, avec une forme de réservoir proche de la nôtre (cf. [7], p. 7).

hésitation, le Corse pour le Patator et sa voiture (mais je ne félicite pas l'odeur de sa voiture), Saint Roux pour avoir pris soin de nous et nous avoir fait marrer (souvent à ses dépens, jamais à son insu), Sarko pour le piment qu'il va mettre dans notre vie, Trinôme pour son hoquet chronique (mais pas pour son coût en nourriture), Céline pour sa capuche, CH pour ses graphiques, Vince pour ses coups de boule, Roland-Garros, mort trop jeune et arrivé trop tard, Jean-Ba pour sa retenue en toutes occasions, Amandine pour être ce qu'elle est, mon Dieu faites qu'elle ne change jamais, je suis désolé pour la bière dans les cheveux (mais pas la tarte dans la tronche, c'est toi qui a commencé) (par contre, le Corse peut toujours se brosser pour que je m'excuse de la bière que je lui ai balancé), Alexandre Astier pour les cours de langue française, Samy grâce à qui je me sens intelligent, Isabel et Daph pour leurs conseils de beauté (merci en tout cas de vous en préoccuper... après dans le détail je sais pas), Fred pour sa blond'-attitude, Chris pour les stages commandos, et la tristesse qui m'envahit à l'idée de devoir finir cette liste ne m'empêchera pas d'aller au but, merci l'Épicéa pour les bons petits plats mitonnés, l'accueil chaleureux, tu auras toujours su nous réserver une petite place... Mais petite la place... et fallait attendre. CHIENNE DE VIE!!!!!!!!!!!!

Références

- [1] BENIELLI D., *Excitation paramétrique et déferlement d'ondes internes en fluide stratifié*, Thèse, Univ. Lyon I (1995).
- [2] GILL A. E., *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press.
- [3] GOSTIAUX L., *Étude expérimentale des ondes de gravité internes en présence de topographie. Émission, propagation, réflexion*. Thèse, ENS Lyon (2006).
- [4] GUYON E., HULIN J-P., PETIT L., *Hydrodynamique physique (seconde édition)*, CNRS Éditions.
- [5] HAZEWINKEL J., VAN BREEVOORT P., DALZIEL S. B., MAAS L. R. M., *Observations on the wave number spectrum and evolution of an internal wave attractor in a two-dimensional domain*, soumis au J. Fluid Mech.
- [6] LAM F-P. A., *Ocean and laboratory observations on waves over topography*. Thèse, Univ. of Utrecht (2007).
- [7] MAAS L. R. M., *dossier du projet européen MAIWA (Mixing Along Internal Wave attractors)* (1995).
- [8] MAAS L. R. M. & LAM F-P. A., *Geometric focusing of internal waves*, J. Fluid Mech., vol. 300, pp. 1–41 (1995).
- [9] MAAS L. R. M., BENIELLI D., SOMMERIA J. & LAM F-P. A., *Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid*, Nature, vol. 388, pp. 557–560 (1997).
- [10] MAAS L. R. M., *Wave attractors : linear yet nonlinear*, Int. J. of Bifurcation and Chaos, vol. 15, no. 9, pp. 2757–2782 (2005).
- [11] MUNK W. & WUNSCH C., *Abysal recipes II : energetics of tidal and wind mixing*, Deep-Sea Research I 45, pp. 1977–2010 (1998).
- [12] NOIR J., JAULT D. & CARDIN P., *Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere, at low Ekman number.*, J. Fluid Mech., 437, 283-299, (2001).
- [13] RIEUTORD M., VALDETTARO L. & GEORGEOT B., *Inertial Waves in a Rotating Spherical Shell : Attractors and Asymptotic Spectrum*, J. Fluid Mech., vol 453, pp. 103–144 (2001).
- [14] STAQUET C., *Internal gravity waves in geophysical fluids*, CISM Lecture Notes No 479, Springer Verlag, pp. 75–13 (2005).